

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XIV-a  
7 mai 2016

Clasa a IV-a

**Problema 1**

Aflați cifrele  $a, b, c, d$  pentru care  $\overline{abcd} + \overline{abc} = 2015$ .

Concurs, Serbia, 2015

**Problema 2**

Avem două cutii cu creioane. Punem din prima cutie într-a doua atât cât conține a doua. Apoi punem din cutia a doua în prima atât cât conține prima. În final punem din prima cutie în a doua atât cât conține a doua. În final, în fiecare cutie sunt câte 48 de creioane. Câte creioane au fost inițial în fiecare cutie?

\*\*\*

**Problema 3**

De Moș Crăciun, învățătoarea a cumpărat pentru elevii din clasa a 3-a de 4 ori mai multe bomboane decât ciocolate.. Fiecare copil a primit câte 2 ciocolate și 7 bomboane și au rămas nedistribuite 3 ciocolate și 32 de bomboane. Câți elevi erau în acea clasă ?

Ioana Onofrei

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XIV-a

7 mai 2016

Clasa a V-a

### **Problema 1**

Un “palindrom” este un șir de caractere(cuvinte, fraze sau numere) care citit de la stânga la dreapta sau de la dreapta la stânga rămâne neschimbat. Arătați că șirul 5, 13, 21, ... conține o infinitate de numere palindromice.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București  
Neculai Stanciu, Buzău

### **Problema 2**

Aflați numerele de forma  $\overline{abc}$  și  $x, y$  numere naturale știind că:

$$4(\overline{abc} + 7^x) = 2013 - 6^y$$

Florin Antohe, Galați

### **Problema 3**

Mulțimea numerelor naturale impare se împarte în submulțimi astfel:

$$\{1\}, \{3,5\}, \{7,9,11\}, \{13,15,17,19\}, \dots$$

- Aflați care este primul număr din cea de a 2014-a submulțime,
- Există o submulțime de acest tip care începe cu 2013? Justificați răspunsul.

E:14720, GM 10/2014, Relu Ciupea, Oltenița

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XIV-a

7 mai 2016

Clasa a VI-a

### **Problema 1**

Aflați numerele naturale  $\overline{xy}$ , scrise în baza 10 astfel încât:

$$\frac{\overline{xy3xy}}{xy+3} \in N \quad .$$

Florin Antohe, Galați

### **Problema 2**

Un bazin este umplut de 10 robinete identice în 12 ore.

- Știind că din oră în oră se închide câte un robinet, să se arate că după ce ultimul robinet este închis bazinul nu este umplut pe jumătate,
- De câte robinete identice și care curg la fel ar fi nevoie ca închizându-se din oră în oră câte unul bazinul să fie plin după ce ultimul robinet s-a închis?

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

### **Problema 3**

Se consideră triunghiul  $ABC$  în care  $m(\angle A) = 2m(\angle B) + 30^\circ$ . Punctul  $M$  este situat pe segmentul  $(BC)$  astfel încât  $AM = AC$ . Dacă  $m(\angle MAC) = 2m(\angle MAB)$  arătați că  $BM = MC$ .

E:14682, GM 6-7-8/2014, Cristina Vijdeluc și Mihai Vijdeluc, Baia Mare

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XIV-a  
7 mai 2016

Clasa a VII-a

**Problema 1**

Determinați o proporție în care suma extremilor este 23, suma mezilor este 17 și suma pătratelor tuturor termenilor este 578.

Marin Simion, Rm. Sărat

**Problema 2**

Determinați măsurile unghiurilor trapezului isoscel  $ABCD$  în care  $AB \parallel CD$ ,  $AB = 16\text{cm}$ ,  $CD = 8 - 4\sqrt{3}\text{cm}$  și înălțimea egală cu  $2\text{cm}$ .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

**Problema 3**

Fie  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ . Arătați că:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{b(a+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{1008}} < \frac{2017(a+b+c)}{2016}.$$

Costin Negrii, profesor, București

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE – ediția a XIII-a

25 aprilie 2015

Clasa a VIII-a

### **Problema 1**

Se consideră triunghiul echilateral  $MNP$  și punctul  $A$  exterior planului  $(MNP)$ . Știind că  $MN = 24cm$ ,  $AM = 12cm$ ,  $AN = AP = 12\sqrt{2}cm$  și că  $B$  este mijlocul lui  $(NP)$  calculați aria triunghiului  $AMB$ .

Marin Simion, Rm. Sărat

### **Problema 2**

Rezolvați în  $N \times N$  ecuația:  $x^2 = 4y^2 + 3y + 3$ .

Constantin Apostol, Rm. Sărat

### **Problema 3**

Determinați numerele iraționale  $r$  pentru care numerele  $p = r^2 - 2r - 3$  și  $q = r^3 - 5r - 6$  sunt raționale.

E:14987, GM 3/2016, Lucian Dragomir, Oțelul Roșu

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XIV-a

7 mai 2016

Clasa a IX-a

**Problema 1**

Fie  $a, b \in [0, \infty)$ . Să se arate că:

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3 + b^3}{2}\right)^2$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

**Problema 2**

Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi ABC știind că înălțimea, bisectoarea, și mediana din vârful C împart unghiul C în patru unghiuri cu măsuri egale.

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București  
Neculai Stanciu, Buzău

**Problema 3**

Să se arate că un triunghi în care  $OH = R$  este dreptunghic.

Marcel Țena, E:26806, GM 9/2013

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XIV-a

7 mai 2016

Clasa a X-a

**Problema 1**

Rezolvați în  $R \times R$  sistemul:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{y} = \sqrt[3]{y+1} - \sqrt[3]{x+2}$$

$$x - y + y^2 - x^2 = 2$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

**Problema 2**

Rezolvați ecuația:  $[\log_4 x] + [\log_4 2x] = \log_2 2\sqrt{x}$ ,  $x \in R$ .

Ovidiu Țâțan, Rm. Sărat

**Problema 3**

Dacă  $z_1, z_2, z_3$ , sunt numere complexe de modul 1, cu  $|-z_1 + z_2 + z_3| = \sqrt{2}$ ,  
 $|z_1 - z_2 + z_3| = \sqrt{3}$  și  $|z_1 + z_2 - z_3| = \sqrt{6}$ , arătați că  $|z_1 + z_2 + z_3| = 1$ .

Supliment GM 4/2015, Aurel Doboșan, Lugoj

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XIV-a  
7 mai 2016  
Clasa a XI-a

**Problema 1**

Să se determine  $a, b > 0$  astfel încât  $a^x + b^x \geq x^a + x^b, \forall x \in (0, \infty)$ .

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

**Problema 2**

Fie  $k \in \mathbb{N}^*$  și  $tg x_k = \frac{\sqrt{4k - 2\sqrt{4k^2 - 1}}}{1 + \sqrt{4k^2 - 1}}$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)$ .

D.M. Bătinețu-Giurgiu, București  
Neculai Stanciu, Buzău

**Problema 3**

Fie  $A \in M_n(\mathbb{R})$  cu proprietatea că  $A^2 = I_n$ . Să se arate că există  $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$  astfel încât:  $X + Y = I_n, AX = X$  și  $AY = -Y$ .

G.M.11-2010

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.



SPERANȚE RÂMNICENE –ediția a XIV-a

7 mai 2016

Clasa a XII-a

**Problema 1**

Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos x + e^{\sin x}} dx$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

**Problema 2**

Fie  $f : [1,2] \rightarrow [1,2]$  o funcție continuă. Atunci:

a)  $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx + \frac{1}{2} \int_1^2 f(x) dx \leq \frac{3}{2}$ ,

b) Știind că  $\int_1^2 f(x) dx = 2$  arătați că  $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$ .

Dragoș Lăzărescu, Rm. Sărat

**Problema 3**

Fie  $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ , unde  $n \geq 2$  este un număr natural.

a) Scrieți cu ajutorul lui  $\varepsilon$  descompunerea în factori ireductibili în inelul  $C[X]$  a polinomului  $f = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$ ,

b) Calculați produsele  $P_1 = \prod_{k=1}^{n-1} (\varepsilon^k - \frac{1}{\varepsilon^k})$  și  $P_2 = \prod_{k=1}^{n-1} (\varepsilon^k + \frac{1}{\varepsilon^k})$ .

Marcel Țena, București

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.